# İKİ BOYUTLU BENZERLİK DÖNÜŞÜMÜNDE İKİ SİSTEM KOORDİNATLARININ VARYANS BİLEŞENLERİNİN KESTİRİMİ

C. AYDIN[1], S. Ö. UYGUR[2]

[1] *Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, Harita Mühendisliği Bölümü, Jeodezi Anabilim Dalı, İstanbul, caydin@yildiz.edu.tr*

[2] *Yıldız Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, Harita Mühendisliği Bölümü, Jeodezi Anabilim Dalı, İstanbul, ouygur@yildiz.edu.tr*

## Özet

*İki veya üç boyutlu koordinat dönüşüm probleminde yalnız hedef sistem koordinatları değil, başlangıç sistem koordinatları da rasgele hatalı değerler olabilir. Bu durumda klasik dengeleme modeli yerine "Katsayıların da Rasgele Hatalı Olduğu Dengeleme Modeli (Errors-In-Variables/EIV model)" ele alınmalıdır. Klasik EIV modelin stokastik kısmı (bilinmeyen) tek bir varyans bileşeni (varyans çarpanı) ile oluşturulur. Yani eşlenik noktaların iki koordinat sistemindeki koordinatlarının homojen olduğu varsayılır. Ancak hedef ve başlangıç sistem koordinatları iki farklı kaynaktan gelen rasgele değişkenler olabilir. Bu nedenle klasik model "farklı varyans bileşen bilinmeyenli EIV model" olarak ele alınmalıdır.*

*Klasik EIV modelde katsayılar matrisi hatalıdır. Bu model, "Ağırlıklı Toplam En Küçük Kareler (Weighted Total Least-Squares/WTLS)" adı verilen yönteme ilişkin iteratif algoritmalar ile çözülür. Diğer yandan, farklı varyans bileşenlerinin çözümüne ilişkin iteratif algoritmalarda (Helmert, IAUE, BIQUE vb.) katsayılar matrisi doğru olmalıdır. Peki farklı varyans bileşenli EIV modelin çözümü için WTLS algoritmaları ile varyans bileşen kestirimi algoritmaları nasıl birleştirilecek ve tek anlamlı sonuç elde edilebilecektir? Bu çalışmada bu soruyu yanıtlamak için bir nümerik algoritma verilmekte; problemin çözümü iki boyutlu benzerlik dönüşümü üzerinden irdelenmektedir.*

*Anahtar kelimeler: Katsayıların da Hatalı Olduğu Dengeleme Modeli, Varyans Bileşen Kestirimi, İki Boyutlu Benzerlik Dönüşümü*

# ESTIMATION of VARIANCE COMPONENTS of TWO SYSTEM COORDINATES in 2D SIMILARITY TRANSFORMATION

## Abstract

*In two or three dimensional coordinate transformation problems, not only target system coordinates but also start system coordinates may be random variables. In such a case, instead of classical adjustment model, Errors-In-Variables (EIV) model should be taken into account. The stochastic part of the classical EIV model is established by a unique variance component (variance factor). In other words, it is assumed that the identical points' coordinates in two coordinate systems are homogeneous. However, the target and the start system coordinates may be the random variables coming from two different sources. Therefore, classical model should be taken as the "EIV model with unknown variance components".*

*HKMO-Mühendislik Ölçmeleri STB Komisyonu*
*7. Ulusal Mühendislik Ölçmeleri Sempozyumu*
*15-17 Ekim 2014, Hitit Üniversitesi - Çorum,*

*Classical EIV model consists of an erroneous design matrix. There exist different iterative algorithms deduced from "Weighted Total Least-Squares (WTLS) method" to solve this model. On the other hand, the variance component estimation iterative algorithms (Helmert, IAUE, BIQUE etc.) should be adapted to an adjustment model with a true design matrix. So, how do we combine the WTLS algorithms and existing variance component estimation algorithms and how do we get a unique solution? In this contribution, we give a numerical algorithm to answer this question; the solution of the corresponding problem is examined using 2D similarity transformation.*

*Keywords: Errors-In-Variables Model, Variance Component Estimation, 2D Similarity Transformation*

# 1. Yöntem

## 1.1 EIV Model ve WTLS Çözümü

"$y-e_y=A\boldsymbol{\beta}$; $e_y \sim (0,\ \sigma_0^2 Q_y)$" şeklindeki bir dengeleme modelinde geçen n×u boyutlu A (düzeltme denklemleri) katsayılar matrisinin elemanlarının tümü veya bir bölümü hatalı terimlerden oluşuyorsa, bu model, aşağıdaki biçimde yazılır;

$$y-e_y=(A-E_A)\boldsymbol{\beta}\ ;\ \boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix} e_y \\ e_A \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_\gamma = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_y & 0 \\ 0 & Q_A \end{bmatrix}\right) \tag{1}$$

Buna EIV model adı verilir. Burada, y, n×1 boyutlu ölçüler vektörü; $e_y$, n×1 boyutlu ölçülerin hata vektörü; $E_A$, A katsayılar matrisine ilişkin n×u boyutlu hata matrisi; $e_A$, $E_A$'dan vec operatörüyle elde edilen nu×1 boyutlu hata vektörü ($e_A=\mathrm{vec}E_A$); $\boldsymbol{\gamma}$, n(u+1)×1 boyutlu toplam hata vektörü; $\boldsymbol{\Sigma}_\gamma$, $\boldsymbol{\gamma}$'ya ilişkin kovaryans matris; $Q_y$ ve $Q_A$, sırasıyla, $e_y$'ye ve $e_A$'ya ilişkin n×n boyutlu ve nu×nu boyutlu kofaktör matrisler; $\boldsymbol{\beta}$, u×1 boyutlu bilinmeyenler vektörü; $\sigma_0^2$, (bilinmeyen) varyans çarpanı (varyans bileşeni) ve n ile u, sırasıyla, ölçü sayısı ve bilinmeyen sayısıdır (Snow, 2012).

(1)'de verilen EIV model, WTLS yöntemi ile çözülür (Schaffrin ve Wieser, 2008). Yöntem, "$e_y^T Q_y^{-1} e_y + e_A^T Q_A^{-1} e_A$" karesel biçiminin "$y-e_y-(A-E_A)\boldsymbol{\beta}=0$" koşul denklemlerine göre en küçük yapılmasına; buradan elde edilen Lagrange fonksiyonu ile bulunan dört Euler denkleminin çözümüne dayanır. Sonuç normal denklemlerin (genel normal denklemlerin) her iki tarafında da bilinmeyenler yer alır (Schaffrin ve Wieser, 2008; Snow, 2012). Bu amaçla, çözüm için iteratif algoritmalar oluşturulmuştur. Güncel kaynaklarda yer alan bu algoritmalar üç başlık altında ele anılabilir; 1) Genel normal denklemlerden doğrudan elde edilen iteratif algoritma (Schaffrin ve Wieser, 2008; Snow, 2012); 2) Genel normal denklemlerden bazı bilinmeyenlerin eliminasyonu ile oluşturulan iteratif algoritma (Snow, 2012); 3) Söz konusu normal denklemlerin farklı ele alınışı ile oluşturulmuş geliştirilmiş WTLS çözüm algoritması (Tong, vd. 2011). Sözü edilen iteratif algoritmalar ile eşit sonuçlar elde edilir. Yanı sıra, Neitzel (2010), EIV modelin doğrusal olmayan Gauss-Helmert modeli biçimde yazılabileceğini belirtmiş, bu modelin uygun biçimde doğrusallaştırılarak iteratif çözüldüğü bir algoritmayı vermiştir. Bu algoritmanın eşitlikleri diğerleriyle karşılaştırıldığında aslında yukarıda belirtilen ikinci algoritmaya denk geldiği görülmektedir.

## 1.2 İki Boyutlu Benzerlik Dönüşümü için EIV Model

p>2 sayıdaki eşlenik noktaya ilişkin hedef sistemi koordinatları vektörü, $y=[...X_i\ Y_i...]^T$ ve başlangıç sistemi koordinatları vektörü, $x=[...x_i\ y_i...]^T$ olsun. Bu iki sistem arasındaki benzerlik dönüşümü için (1) ile verilen EIV model aşağıdaki gibidir;

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ X_i \\ Y_i \\ \vdots \end{bmatrix}}_{y} - \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots \\ e_{Xi} \\ e_{Yi} \\ \vdots \end{bmatrix}}_{e_y} = (\underbrace{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & x_i & -y_i \\ 0 & 1 & y_i & x_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{A} - \underbrace{\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & e_{xi} & -e_{yi} \\ 0 & 0 & e_{yi} & e_{xi} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}}_{E_A})\underbrace{\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}} = y - e_y = (A - E_A)\boldsymbol{\beta} \;;$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} e_y \\ e_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_y \\ J e_x \end{bmatrix} \sim (\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_\gamma = \sigma_0{}^2 Q_\gamma = \begin{bmatrix} Q_y & 0 \\ 0 & Q_A \end{bmatrix} = \sigma_0{}^2 \begin{bmatrix} Q_y & 0 \\ 0 & J Q_x J^T \end{bmatrix}) \tag{2}$$

Burada, t'ler öteleme bilinmeyenleri; k'lar diğer dönüşüm parametreleri; $e_x$, $(n=2p)\times 1$ boyutlu başlangıç sistemi koordinatlarının hata vektörü; J, $e_x$ vektöründen $e_A$ vektörüne geçişi sağlayan $nu\times n$ boyutlu Jacobian matris ve $Q_x$, başlangıç sistemi koordinatlarının $n\times n$ boyutlu kofaktör matrisidir. J matrisi yukarıdaki benzerlik dönüşüm modeli için şöyle oluşturulur;

$$J = \begin{bmatrix} 0_{(n\times n)} \\ 0_{(n\times n)} \\ I_{(n\times n)} \\ D_{(n\times n)} \end{bmatrix}, \; (D = I_{(p\times p)} \otimes K) \;\text{ ve } K = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}) \tag{3}$$

Burada, I, birim matris; $\otimes$ ise Kronecker çarpımıdır. Bir önceki bölümde sözü edilen WTLS algoritmaları kullanılarak, en son iterasyonda bilinmeyenlerin kestirim değerleri ($\hat{t}_x, \hat{t}_y, \hat{k}_1, \hat{k}_2$) ve hata vektörlerinin kestirim değerleri ($\hat{e}_y$ ve $\hat{e}_A$) bulunur. Sonuçta varyans çarpanı,

$$\hat{\sigma}_0{}^2 = \frac{\hat{e}_y^T Q_y^{-1} \hat{e}_y + \hat{e}_A^T Q_A^{-1} \hat{e}_A}{n-u} \tag{4}$$

şeklinde belirlenir (Snow, 2012).

Çözüme ulaşılan m. iterasyondaki EIV modeli ise aşağıdaki gibi bir Gauss-Helmert modeli biçimde yazılabilir (Neitzel, 2010; Snow, 2012);

$$(A - E_{A,m-1})\boldsymbol{\beta} + B_{m-1}\boldsymbol{\gamma} = y - E_{A,m-1}\,\boldsymbol{\beta}_{m-1} \quad ; \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\gamma} = \sigma_0^{\,2} Q_{\gamma} \tag{5}$$

Burada, (m–1) indisli değerler önceki iterasyon sonucunda elde edilen kestirim değerleri; $B_{m-1}$ matrisi ise m–1 iterasyonunda bulunan bilinmeyenlerin bir fonksiyonudur;

$$B_{m-1} = [I_{(n\times n)} \; - (\boldsymbol{\beta}^{T}_{m-1} \otimes I_{(n\times n)})] \tag{6}$$

## 1.3 Farklı Varyans Bileşen Bilinmeyenli EIV Model ve Çözümü

Bir önceki bölümde belirtilen koordinatların rasgele hata vektörleri, sırasıyla $e_y \sim (0, \sigma_y^2 Q_y)$ ve $e_x \sim (0, \sigma_x^2 Q_x)$ olsun; yani hedef ve başlangıç koordinatları farklı kaynaklardan gelsin. Buna göre (2) ile verilen EIV model,

$$y - e_y = (A - E_A)\boldsymbol{\beta} \; ; \; \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} e_y \\ e_A \end{bmatrix} \sim \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\Sigma}_{\gamma} = \sigma_y^{\,2} \begin{bmatrix} Q_y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \sigma_x^{\,2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_A \end{bmatrix} \right) \tag{7}$$

şekline, yani "farklı varyans bileşen bilinmeyenli EIV modele" dönüşür. Bunun doğrudan çözümü yoktur. Çözüm için bir WTLS algoritması ile ilgili varyans bileşen algoritması birlikte çalıştırılmalıdır. Bunun için bir nümerik algoritma oluşturulmuştur;

Başlangıç Adımı (j=0) : $(\sigma_y^2)^0 = 1$ ve $(\sigma_x^2)^0 = 1$ alarak (7) modelini oluştur (Bu model, (2) modeli ile özdeş olur). Bir WTLS algoritması ile çözüm gerçekleştir; $\boldsymbol{\beta}^0$ ve $E_A^0$'ları bul.

Adım j (j=1,…):

- *Aşama 1:* Önceki adımdan bulunan kestirim değerlerine ($\boldsymbol{\beta}^{(j-1)}$ ve $E_A^{(j-1)}$) ve varyans bileşenlerine ($(\sigma_y^{\,2})^{(j-1)}$ ve $(\sigma_x^{\,2})^{(j-1)}$) göre aşağıdaki Gauss-Helmert modelini yaz;

  $$(A - E_A^{(j-1)})\boldsymbol{\beta} + B^{(j-1)}\boldsymbol{\gamma} = y - E_A^{(j-1)}\,\boldsymbol{\beta}^{(j-1)} \quad ; \quad (\boldsymbol{\Sigma}_{\gamma})^{(j-1)} = (\sigma_y^{\,2})^{(j-1)} \begin{bmatrix} Q_y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\sigma_x^{\,2})^{(j-1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Q_A \end{bmatrix}$$

- *Aşama 2:* Söz konusu Gauss-Helmert modelindeki varyans bileşenlerini ilgili varyans bileşen kestirim yöntemi (Helmert, IAUE veya BIQUE) ile iteratif kestir; $(\sigma_y^{\,2})^{(j)}$ ve $(\sigma_x^{\,2})^{(j)}$'leri bul.

- *Aşama 3:* Bunları sabit alarak yeniden (7) modelini oluştur; $\boldsymbol{\beta}^{(j-1)}$ ve $E_A^{(j-1)}$'leri yaklaşık değerler alarak söz konusu WTLS algoritması ile yeni değerlerini ($\boldsymbol{\beta}^{(j)}$ ve $E_A^{(j)}$'leri) elde et.

- *Aşama 4:* $\beta^{(j)}$ ile $\beta^{(j-1)}$ 'leri karşılaştır. Birbirlerine eşitse, işlemi sonlandır. Değilse yeni bir adıma geç.

Yukarıda verilen algoritma ile (7) modeli uygun biçimde çözülür. Söz konusu algoritma ile Amiri-Simkooei (2013)'de verilen algoritma birbirlerine benzemektedir. Ancak yukarıda verilen algoritmada herhangi bir WTLS algoritması ve herhangi bir varyans bileşen kestirim algoritması kullanılabilir. Çözüme ulaşıldığında elde edilecek dengeleme sonrası varyans faktörü her zaman 1'e gider. Bu da zaten varyans bileşen kestiriminin bir özelliğidir.

## 2. Sayısal Uygulama

Sayısal uygulama için iki sistemdeki koordinatları Demirel (2009)'da verilen 6 nokta kullanılmıştır (Tablo 1). Bunların ağırlıkları sonradan probleme eklenmiştir.

Tablo 1. Hedef ve başlangıç sistemlerinin koordinatları ve ağırlıkları

| | *Kartezyen Koordinatlar* (m) | | | | *Ağırlıklar* ($m^{-2}$) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Hedef Sistem | | Başlangıç Sistemi | | Hedef Sistem | | Başlangıç Sistemi | |
| i | $X_i$ | $Y_i$ | $x_i$ | $y_i$ | $P_{Xi}$ | $P_{Yi}$ | $P_{xi}$ | $P_{yi}$ |
| 1 | 4527754.612 | 434244.302 | -12681.216 | -11115.112 | 1.0 | 2.0 | 30.0 | 10.0 |
| 2 | 4529097.150 | 432427.995 | -10849.480 | -9793.890 | 5.0 | 2.0 | 4.0 | 20.0 |
| 3 | 4537389.003 | 434023.394 | -12348.250 | -1484.610 | 10.0 | 1.0 | 50.0 | 1.6 |
| 4 | 4533316.751 | 429750.773 | -8123.500 | -5605.860 | 5.0 | 2.0 | 50.0 | 2.4 |
| 5 | 4534306.216 | 426390.182 | -4751.710 | -4655.920 | 4.0 | 0.5 | 1.3 | 3.2 |
| 6 | 4530615.243 | 427898.173 | -6302.628 | -8328.789 | 4.0 | 10.5 | 1.4 | 36.0 |

Söz konusu koordinatların kofaktör matrisleri, Tablo 1'de verilen ağırlıklardan $Q_y=P_y^{-1}$, ($P_y$=diag(...$P_{Xi}$ $P_{Yi}$…)) ve $Q_x=P_x^{-1}$, ($P_x$=diag(...$P_{xi}$ $P_{yi}$…)) şeklinde oluşturulmuştur. Üç farklı benzerlik dönüşümü çözümü yapılmıştır; 1) EKK: Yalnız hedef sistem hatalı öngörülerek bilinen yollardan dengeleme, 2) WTLS: Bölüm 1.2'de açıklanan modele göre çözüm ve 3) WTLS+VB Kestirimi: Bölüm 1.3'de açıklanan algoritmaya göre varyans bileşenlerin de kestirildiği EIV model çözümü (varyans bileşen kestirimi Helmert yöntemine göre yapılmıştır. WTLS ve Helmert algoritmalarında tolerans değerleri, sırasıyla $10^{-12}$ ve $10^{-8}$ alınmıştır. Bölüm 1.3'de verilen "Aşama 4" için ise $10^{-9}$ tolerans değeri kullanılmıştır). Tablo 2, bu çözümlerden elde edilen bilinmeyen kestirimlerini, ölçek çarpanı değişimlerini ($\delta\hat{\lambda}=1-(\sqrt{\hat{k}_1^2+\hat{k}_2^2}$ ), dönüklükleri;( $\hat{\varphi}=\arctan(\hat{k}_2/\hat{k}_1)$ ) ve bilinmeyenlerin standart sapmalarını (σ'lı terimler) göstermektedir.

Tablo 2. Üç farklı çözümden elde edilen kestirim değerleri

| | EKK | WTLS | WTLS+VB |
|---|---|---|---|
| $\hat{k}_1$ | 0.011644852 | 0.011646564 | 0.011644546 |
| $\hat{k}_2$ | -1.000000521 | -0.999995658 | -0.999992633 |
| $\hat{t}_x$ -4539017 (m) | 0.381389144 | 0.369917864 | 0.333062254 |
| $\hat{t}_y$ -421692 (m) | 0.531349182 | 0.590146347 | 0.599197710 |
| $\delta\hat{\lambda}$ (ppm) | 68.320 | 63.477 | 60.429 |
| $\hat{\varphi}$ | 270°40'1".81 | 270°40'2".18 | 270°40'1".77 |
| $\hat{\sigma}_{k_1}$ | 0.000009499 | 0.000007845 | 0.000005854 |
| $\hat{\sigma}_{k_2}$ | 0.000008253 | 0.000008320 | 0.000007896 |
| $\hat{\sigma}_{t_x}$ (m) | 0.114449122 | 0.096522332 | 0.085447744 |
| $\hat{\sigma}_{t_y}$ (m) | 0.095224688 | 0.107641137 | 0.096620189 |
| $\hat{\sigma}_0^2$ | 0.027522293 | 0.010966968 | 1.000000000 |

Tablo 2 incelendiğinde, WTLS çözümünün, EKK sütununda yer alan çözümden oldukça farklı olduğu görülmektedir. Buradan benzerlik dönüşümünde iki koordinat sistemindeki koordinatların hatalı değerler olduğu biliniyorken mutlaka WTLS çözümünün uygulanması gerektiği sonucu çıkmaktadır. Diğer yandan üçüncü sütunda verilen sonuçlar da diğerlerinden farklıdır. Buradan da iki sistem koordinatlarının farklı kaynaktan gelmesi durumunda ayrıca varyans bileşenlerinin de hesaba katılması gerektiği anlamı çıkmaktadır.

Çalışmada irdelenen algoritmadaki adım çözümleri Tablo 3'de verilmektedir.

Tablo 3. WTLS+Varyans Bileşeni algoritmasında adım sonuçları (IS: İterasyon Sayısı)

| Adım | Varyans Bileşen Kestirimi Algoritması | | | WTLS Algoritması | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| j | $(\hat{\sigma}_y^2)^{(j)}$ | $(\hat{\sigma}_x^2)^{(j)}$ | IS | $\hat{k}_1^{(j)}$ | $\hat{k}_2^{(j)}$ | $\hat{t}_x^{(j)}-4539017$ (m) | $\hat{t}_y^{(j)}-421692$ (m) | IS |
| 1 | 0.003432475 | 0.022478597 | 21 | 0.011644546 | -0.999992633 | 0.333062184 | 0.599197710 | 3 |
| 2 | 0.003432484 | 0.022478615 | 2 | 0.011644546 | -0.999992633 | 0.333062236 | 0.599197710 | 2 |
| 3 | 0.003432485 | 0.022478613 | 1 | 0.011644546 | -0.999992633 | 0.333062246 | 0.599197710 | 2 |
| 4 | 0.003432485 | 0.022478611 | 1 | 0.011644546 | -0.999992633 | 0.333062250 | 0.599197710 | 2 |
| 5 | 0.003432486 | 0.022478611 | 1 | 0.011644546 | -0.999992633 | 0.333062252 | 0.599197710 | 2 |
| 6 | 0.003432486 | 0.022478611 | 1 | 0.011644546 | -0.999992633 | 0.333062254 | 0.599197710 | 2 |
| 7 | 0.003432486 | 0.022478611 | 1 | 0.011644546 | -0.999992633 | 0.333062254 | 0.599197710 | 2 |

Tablo 3'den görüldüğü üzere iteratif çözüm yedi adımda sonuca yakınsamıştır. İlk adımda varyans bileşen kestirim algoritması uzun bir zamanda yakınsarken, sonraki adımlarda algoritmalar hızlanmıştır.

## 3. Sonuç ve Öneriler

Koordinat dönüşüm problemlerinde iki sistem koordinatları rasgele hatalı olabilir. Bu durumda bilinen dengeleme modeli yerine, her iki sistem koordinatlarının hatalarının göz önüne alındığı EIV modeli oluşturulmalı ve çözüm için WTLS iteratif çözüm algoritmaları kullanılmalıdır. Ancak bu modelde de koordinatların aynı kaynaktan geldiği varsayılmaktadır. Eğer bunların farklı kaynaklardan geldiği biliniyorsa çözüm için söz konusu EIV model de yeterli olmaz; modelde bu hataların varyans bileşenleri de geçmeli, WTLS algoritması ile birlikte bir varyans bileşen kestirimi algoritması da kullanılmalıdır. Çalışmada iki boyutlu benzerlik dönüşümü için bu amaçla "farklı varyans bileşen bilinmeyenli EIV model" düşünülmüş ve bunun çözümü için iki algoritmanın paralel olarak çalıştığı bir algoritma irdelenmiştir.

Bir iki boyutlu benzerlik dönüşümü için sayısal uygulama gerçekleştirilmiştir. EIV model ve "farklı varyans bileşen bilinmeyenli EIV model" çözümleri oldukça farklı bulunmuş; ikinci model ile daha uygun çözümler elde edildiği görülmüştür. Bu nedenle söz konusu modelin ilgili problemin çözümünde göz önüne alınması gerektiği sonucuna varılmıştır. Çalışmada irdelenen algoritma her türlü probleme uygulanabilir niteliktedir. Ancak, bazı problemlerde (örneğin, Q matrislerinin birim matris olduğu problemlerde) varyans bileşen kestirim algoritması çözüme ulaşamamaktır. Bunun algoritmadan kaynaklanan bir sorun olmadığı, ilgili bileşenlerin elde edilmesi için modelde yeterli bilginin bulunmamasının bir sonucu olduğu düşünülmelidir.

## Kaynaklar

Amiri-Simkooei, A. R., (2013). Application of least squares variance component estimation to errors-in-variables models, *Journal of Geodesy*, 87, 933-947.

Demirel, H., (2009). Dengeleme Hesabı, Üçüncü Basım, YTÜ Basım-Yayın Merkezi, İstanbul.

Neitzel, F., (2010). Generalization of total least-squares on example of unweighted and weighted 2D similarity transformation, *Journal of Geodesy*, 84, 751-762.

Schaffrin, B. ve Wieser, A.,(2008). On weighted total least-squares adjustment for linear regression, *Journal of Geodesy*, 82, 415-421.

Snow, K., (2012). Topics in Total Least-Squares Adjustment within the Errors-In-Variables Model: Singular Cofactor Matrices and Prior Information, *Doktora Tezi*, Geodetic Science Ohio State University, Columbus, Ohio.

Tong, X., Jin, Y., Li, L., (2011). An improved weighted total least squares method with applications in linear fitting and coordinate transformation, *Journal of Surveying Engineering*, 137,4, 120-128.